

MATMIX



Prvá séria korešpondenčnej súťaže časopisu MATMIX je za nami, jej riešiteľom sa viac či menej úspešne podarilo zdať prvých osem úloh. Deväť až štrnásť úloh zostali opäť nevyriešené, preto sme sa rozhodli, že v druhej sérii za ich úspešné riešenie môžete získať navyše dva bonusové body za každú, ktorú vyriešite.

Ak vás zadania druhej série úloh zaujali, môžete sa zapojiť do súťaže aj v druhej sérii – nič ešte nie je rozhodnuté. Svoje riešenia nám zašlite do 16. 4. 2012 na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák – MATMIX
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Dve dvojčky, Katarína a Martina, sa chceli vyfotografovať spolu s Dagmarou, Mariánom a Vladimírom. Nevedeli, ako sa majú všetci vedľa seba postaviť do jedného radu. Fotograf splnil podmienku dvojčiek, že chcú stáť vedľa seba, a tiež vedel, že Marián a Vladimír vedľa seba stáť nikdy nebudú. Určte, koľko snímok by musel urobiť fotograf, aby zachytil všetky možnosti, ako môžu deti vedľa seba stáť.

Riešenie: Počet vyhovujúcich možností vypočítame tak, že od počtu všetkých možností odpočítame počet nevyhovujúcich možností. Keďže dvojčky Katarína a Martina chcú stáť vedľa seba, nahradíme ich jednou osobou – Katarínomartinou. Počet usporiadaní štyroch osôb (Dagmara, Marián, Vladimír a Katarínomartina) do jedného radu je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$, pretože na prvé miesto vľavo môžeme postaviť ľubovoľnú z týchto štyroch osôb. Na druhé miesto zľava už môžeme umiestniť len jednu z troch zvyšných osôb, na tretie miesto zľava už vyberáme len z dvoch osôb a na posledné miesto postavíme zvyšnú osobu. Z týchto možností sú nevyhovujúce tie, v ktorých stoja Marián a Vladimír vedľa seba. Spočítame počet týchto možností. Opäť označíme Mariána a Vladimíra ako jednu osobu – Mariánovladimíra. Počet všetkých uspo-

riadaní 3 osôb (Dagmara, Katarínomartina a Mariánovladimír) je analogicky $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$. V každej z týchto možností sú však započítané dve možnosti, lebo Marián a Vladimír sa môžu medzi sebou vymeniť. Počet vyhovujúcich možností teda je $24 - 2 \cdot 6 = 24 - 12 = 12$. Aj tu sú však v každej možnosti započítané dve rôzne možnosti, lebo Katarína a Martina sa môžu medzi sebou tiež vymeniť. Fotograf by teda musel urobiť $2 \cdot 12 = 24$ snímok.

Komentár: Úloha sa dala riešiť aj vypísaním všetkých možností. V takom prípade ale bolo treba zdôvodniť, prečo už žiadne ďalšie možnosti neexistujú.

2. Miško s kamarátkou Miškou našli na povale starú drevenú truhlicu. V nej bol ukrytý poklad – červené, zelené, žlté a modré drahokamy. Červených a zelených drahokamov je spolu 156, zelených a žltých je dohromady 178, žltých a modrých je spolu 192. Pritom červených drahokamov je rovnako veľa ako modrých. Koľko drahokamov z každej farby bolo v truhlici?

Riešenie: Počet červených drahokamov označme x , počet zelených drahokamov y a počet žltých drahokamov z . Modrých drahokamov je x , lebo ich je rovnako veľa ako červených. Na základe informácií zo zadania dostávame nasledujúcu sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi:

$$x + y = 156,$$

$$y + z = 178,$$

$$z + x = 192.$$

Keď všetky tri rovnice sčítame, dostaneme, že platí

$$2(x + y + z) = 526.$$

Po vydelení oboch strán rovnice dvomi dostaneme rovnicu

$$x + y + z = 263.$$

Keď od tejto rovnice odčítame prvú rovnicu, dostaneme, že platí $z = 107$. Keď od nej odčítame druhú rovnicu, dostaneme, že platí $y = 71$. Keď od nej odčítame tretiu rovnicu, dostaneme, že platí $x = 85$. Celkovo teda dostávame, že v truhlici bolo 85 červených, 71 zelených, 107 žltých a 85 modrých drahokamov.

Komentár: Sústava troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi môže mať buď nula, jedno alebo nekonečne veľa riešení. Náhodným dosádzaním rôznych čísel do rovníc síce môžeme uhádnuť nejaké riešenie, ale ešte nevieme, či neexistujú aj nejaké ďalšie riešenia.

3. Majme šachovnicu s rozmermi 10×10 políčok. Najprv do každého políčka vpišeme čísla 1 až 100 po riadkoch, t. j. do prvého riadka zľava doprava 1, 2, 3, ..., 10, do druhého 11, 12, ..., 20, až do políčka vpravo dole vpišeme 100. Potom napíšeme do týchto políčok čísla 1 až 100 aj po jednotlivých stĺpcoch, t. j. do prvého stĺpca zhora nadol 1, 2, 3, ..., 10, do druhého 11, 12, ..., 20, až do políčka vpravo dole vpišeme 100. Koľko bude takých políčok, v ktorých sa súčet čísel do nich vpísaných rovná 101?

Riešenie: Prvé číslo vpísané do políčka v i -tom riadku a j -tom stĺpci označme $a_{i,j}$, druhé číslo vpísané do tohto políčka označme $b_{i,j}$. Zo zadania ľahko nahliadneme, že platí:

$$a_{i,j} = 10(i-1) + j,$$

$$b_{i,j} = 10(j-1) + i.$$

Hľadáme políčka, v ktorých je súčet 101, teda platí

$$101 = a_{i,j} + b_{i,j} = 10(i-1) + j + 10(j-1) + i.$$

Úpravou tejto rovnice postupne dostaneme, že platí

$$101 = 11(i+j) - 20,$$

$$121 = 11(i+j),$$

$$11 = i+j.$$

Súčet vpísaných čísel bude 101 bude v tých políčkach, v ktorých platí $i+j=11$. Takých políčok je presne 10 ($[[1,10],[2,9],[3,8],\dots,[9,2],[10,1]]$) – tvoria jednu z uhlopriečok šachovnice.

Komentár: Úloha sa dala riešiť aj nakreslením tabuľky, vpísaním všetkých čísel a zistením súčtov vo všetkých 100 políčkach. Bol to však trochu zdĺhavejší postup.

4. Nie je pravda, že ak Platón založil Akadémiu, tak v prípade, že Aristoteles bol jeho žiakom, neštudoval na Akadémii. Rozhodnite, či je možné na základe tejto pravdivej informácie odpovedať na otázky:

- Založil Platón Akadémiu?
- Bol Aristoteles Platónovým žiakom?
- Študoval Aristoteles na Akadémii?

Riešenie: Označme si jednotlivé výroky takto:

A ... Platón založil Akadémiu.

B ... Aristoteles bol Platónovým žiakom.

C ... Aristoteles študoval na Akadémii.

Podľa zadania je pravdivý tento výrok: $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C))$. Takže implikácia $(A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C))$ je nepravdivá. Implikácia je nepravdivá len v jedinom prípade – keď z pravdivého tvrdenia vyplýva nepravdivé tvrdenie. Preto je A pravdivý výrok, a implikácia $B \Rightarrow \neg C$ je nepravdivá. Aby bola táto implikácia nepravdivá, musí byť B pravdivý výrok a $\neg C$ nepravdivý, teda C je pravdivý výrok. To znamená, že Platón založil Akadémiu, Aristoteles bol Platónovým žiakom a Aristoteles študoval na Akadémii.

Iné riešenie: Výrok $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C))$ je ekvivalentný s výrokom $(A \wedge \neg(B \Rightarrow \neg C))$. Ten je zase ekvivalentný s výrokom $(A \wedge (B \wedge \neg(\neg C)))$, ktorý je ekvivalentný s výrokom $A \wedge (B \wedge C)$. Takáto konjunkcia troch výrokov je pravdivá práve vtedy, keď sú pravdivé všetky tri výroky A, B, C.

5. Lichobežník je rozdelený jednou uhlopriečkou na dva trojuholníky, ktorých obsahy sú 10 cm^2 a 12 cm^2 . Jeho dlhšia základňa má dĺžku 6 cm. Akú dĺžku má kratšia základňa tohto lichobežníka?

Riešenie: Označme vrcholy tohto lichobežníka písmenami A, B, C, D, pričom AB je dlhšia a CD kratšia základňa. Uhlopriečka AC delí lichobežník na dva trojuholníky ABC a CDA. Výška lichobežníka v je zároveň aj výškou trojuholníka ABC,

aj trojuholníka CDA. Obsah trojuholníka ABC je 12 cm^2 a obsah trojuholníka CDA je 10 cm^2 . Pomer obsahu trojuholníka CDA k obsahu trojuholníka ABC je rovnaký ako pomer dĺžky kratšej základne k dlhšej, lebo platí

$$\frac{S_{\triangle CDA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot v}{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot v} = \frac{|CD|}{|AB|}.$$

Dosadením známych hodnôt dostávame, že platí:

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{6}.$$

Z toho vyplýva, že $|CD| = 5 \text{ cm}$.

Komentár: Väčšina z vás riešila príklad tak, že ste najprv zo vzťahu pre obsah trojuholníka ABC určili výšku lichobežníka v . Potom ste dĺžku kratšej základne lichobežníka vypočítali buď zo vzťahu pre obsah trojuholníka CDA, alebo zo vzťahu pre obsah lichobežníka ABCD. Ako však vidno zo vzorového riešenia, na to, aby sme vypočítali dĺžku kratšej základne, nemusíme vôbec zisťovať, aká je výška lichobežníka v .

6. V zámku našli mŕtveho grófa. Podozriví boli štyria jeho sluhovia. Vyšetrovateľ od svedkov zistil, že každý z jeho sluhov bol v sledovanom čase v zámku práve raz. Pred výsluchom sa sluhovia dohodli, že budú hovoriť samé klamstvá. Každý z nich uviedol dve výpovede:

1. sluha: „Nikto z nás štyroch nezabil grófa.“

„Keď som odchádzal, gróf ešte žil.“

2. sluha: „Ja som prišiel ako druhý.“

„Keď som prišiel, gróf bol mŕtvy.“

3. sluha: „Ja som prišiel ako tretí.“

„Keď som prišiel, gróf žil.“

4. sluha: „Vrah neprišiel po mne.“

„Keď som prišiel, gróf bol už mŕtvy.“

Zistite, ktorý zo sluhov zabil grófa, a v akom poradí u neho boli.

Riešenie: Sluhovia klamali, takže pravdivé sú negácie ich výrokov:

1. sluha: „Niektorý z nás štyroch zabil grófa.“

„Keď som odchádzal, gróf už nežil.“

2. sluha: „Ja som neprišiel ako druhý.“

„Keď som prišiel, gróf nebol mŕtvy.“

3. sluha: „Ja som neprišiel ako tretí.“

„Keď som prišiel, gróf nežil.“

4. sluha: „Vrah prišiel po mne.“

„Keď som prišiel, gróf ešte nebol mŕtvy.“

Pri príchode druhého a štvrtého sluhu gróf ešte žil, preto museli prísť skôr ako prvý a tretí sluha. Druhý sluha neprišiel ako druhý, takže musel prísť ako prvý, a preto ako druhý prišiel štvrtý sluha. Tretí sluha neprišiel ako tretí, takže musel prísť ako posledný. Ako tretí potom musel prísť prvý sluha. Vrah prišiel až po návšteve štvrtého sluhu. Štvrtý sluha teda nemohol zabiť grófa. V čase odchodu prvého sluhu bol už gróf mŕtvy, čiže grófa zabil prvý sluha.

7. Med je zdravou a výživnou súčasťou potravy. Včelí plást je tvorený komôrkami, ktoré majú tvar pravidelného šesťbokého hranola so stranou 3 mm a výškou 12 mm. Koľko

litrov medu je v celom pláste po jeho naplnení, ak plást tvorí približne 350 komôrok?

Riešenie: Podstava pravidelného šesťbokého hranola je pravidelný šesťuholník. Ten sa skladá zo šiestich rovnostranných trojuholníkov. Obsah rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 3 mm sa rovná

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \text{ mm}^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ mm}^2.$$

Obsah pravidelného šesťuholníka sa potom bude rovnať

$$6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ mm}^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ mm}^2.$$

Hranol má výšku 12 mm, takže jeho objem vypočítame ako

$$12 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ mm}^3 = 162\sqrt{3} \text{ mm}^3.$$

Plást tvorí 350 komôrok, teda objem komôrok v celom pláste je

$$350 \cdot 162\sqrt{3} \text{ mm}^3 \doteq 98\,207 \text{ mm}^3.$$

1 liter je 1 000 000 mm³, takže v celom pláste je po jeho naplnení je približne 0,098 litra medu.

8. Majme postupnosť čísel, ktorej prvý člen sa rovná 2011. Druhý člen tejto postupnosti dostaneme ako podiel prvého člena a čísla o jeden od neho väčšieho. Tretí člen takisto dostaneme ako podiel hodnoty druhého člena a čísla o jeden od neho väčšieho. Postupne takto vytvoríme postupnosť čísel, z ktorých každé nasledujúce je podielom predchádzajúceho člena a čísla o jeden od neho väčšieho. Určte 2011. člen tejto postupnosti.

Riešenie: k -ty člen postupnosti označme ako a_k . Pozrime sa, ako vyzerá niekoľko prvých členov tejto postupnosti. Prvý člen je $a_1 = 2011$. Druhý člen je

$$a_2 = \frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{2011}{2011 + 1} = \frac{2011}{2012}.$$

Tretí člen postupnosti je

$$a_3 = \frac{a_2}{a_2 + 1} = \frac{\frac{2011}{2012}}{\frac{2011}{2012} + 1} = \frac{\frac{2011}{2012}}{\frac{2011 + 2012}{2012}} = \frac{2011}{4023} = \frac{2011}{2 \cdot 2011 + 1}.$$

Štvrtý člen postupnosti je

$$a_4 = \frac{a_3}{a_3 + 1} = \frac{\frac{2011}{4023}}{\frac{2011}{4023} + 1} = \frac{\frac{2011}{4023}}{\frac{2011 + 4023}{4023}} = \frac{2011}{6034} = \frac{2011}{3 \cdot 2011 + 1}.$$

Na základe toho môžeme odhadnúť, že platí

$$a_k = \frac{2011}{(k-1) \cdot 2011 + 1}.$$

Dokážeme to matematickou indukciou. Prvý krok indukcie sme už spravili – dokázali sme, že to platí pre $k = 1, 2, 3, 4$. Teraz dokážeme, že pre každé prirodzené číslo k platí:

$$\text{Ak } a_k = \frac{2011}{(k-1) \cdot 2011 + 1}, \text{ tak } a_{k+1} = \frac{2011}{k \cdot 2011 + 1}:$$

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + 1} = \frac{\frac{2011}{(k-1) \cdot 2011 + 1}}{\frac{2011}{(k-1) \cdot 2011 + 1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{2011}{(k-1) \cdot 2011 + 1}}{\frac{2011 + (k-1) \cdot 2011 + 1}{(k-1) \cdot 2011 + 1}} = \frac{2011}{k \cdot 2011 + 1}.$$

Tým sme pomocné tvrdenie dokázali a na základe neho dostávame, že 2011. člen postupnosti sa rovná

$$\frac{2011}{2010 \cdot 2011 + 1}.$$

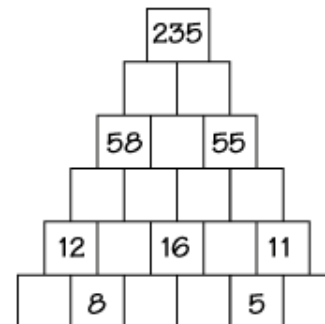
Komentár: Ak pre prvé štyri členy postupnosti platí, že

$$a_k = \frac{2011}{(k-1) \cdot 2011 + 1},$$

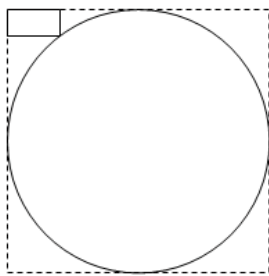
ešte nemôžeme tvrdiť, že to platí pre všetky členy postupnosti. Čo keby to už pre piaty člen neplatilo? Toto tvrdenie musíme dokázať, vhodným prostriedkom na to je matematická indukcia.

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

- Máme k dispozícii dve vedrá, jedno 17-litrové a druhé 9-litrové, a neobmedzený zdroj vody. Vašou úlohou je do 17-litrového vedra naliať presne 13 litrov vody.
- Doplňte pyramídu tak, aby platilo, že každý prvok je súčet tých dvoch, ktoré sa nachádzajú pod ním (okrem posledného riadku):



- Určte dĺžku a šírku obdĺžnikovej záhrady, keď viete o nej tieto informácie: Keby šírka zostala taká, aká je, a dĺžka by bola 30 metrov, bol by obsah o 120 m² menší než v skutočnosti. Pri nezmenenej šírke a dĺžke 40 m by mala záhrada obsah o 80 m² väčší než skutočne má.
- Neviem si spomenúť na Tomášovo číslo. Pamätám si len, že:
 - Je šesťmiestne.
 - Trojciferné číslo tvorené prvými tromi ciframi (v takom poradí, ako sú v Tomášovom čísle) je štvrtinou trojciferného čísla tvoreného druhými tromi ciframi z Tomášovho čísla (taktiež v poradí).
 - Prostredné dve číslice sú rovnaké.
 - Druhá číslica je dvojnásobok prvej.
 - Tretia číslica je buď dvojnásobok prvej, alebo o 3 väčšia. Viete zistiť Tomášovo číslo?
- Ornament pečate je znázornený na obrázku. Vypočítajte polomer kruhu za predpokladu, že malý obdĺžnik vľavo hore má rozmery 1 cm x 2 cm.



6. Dominik pozoroval sedačkovú lanovku na vrcholku magickej hory. Vyhladol si jednu sedačku a chcel zistiť, za ako dlho urobí celý okruh, teda zo spodnej stanice späť do spodnej stanice. Keď bola jeho sedačka v spodnej stanici, zapol stopky. Spočiatku spodnou stanicou prechádzala každých 8 sekúnd jedna sedačka. No po 3 minútach a 28 sekundách lanovku pustili rýchlejšie a teraz spodnou stanicou prechádzali sedačky každých 5 sekúnd. Keď sa Dominikova sedačka vrátila do spodnej stanice, vypol stopky. Ukazovali 11 minút a 13 sekúnd. Koľko sedačiek mala lanovka?
7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.
8. Predpokladajme, že každý bod roviny je odfarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje

dvojica bodov odfarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2 .
10. Nájdite všetky prirodzené čísla m, n , ktoré sú riešeniami rovnice
- $$2^m - 3^n = 7.$$
11. Zistite, či existuje množina 4 004 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 003-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 003.
12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť
- $$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$
13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom
- $$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$$
- pričom $a_1 = 20, a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré je číslo $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.
14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:
- $$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

Riešenia úloh 2. série korešpondenčnej súťaže zasielajte do 16. 4. 2012.

NOBELOVE CENY ZA ROK 2011

Nobelove ceny sa udeľujú každý rok od roku 1901 na počesť Alfréda Nobela v týchto oblastiach: fyzika, fyziológia alebo medicína, chémia, literatúra, mier. V niektorých rokoch však neboli niektoré ceny udelené (najmä vo vojnovom období). Od roku 1969 sa spolu s týmito cenami udeľuje aj cena Švédskej centrálnej banky za ekonómiu na počesť Alfréda Nobela, ktorá sa častokrát nesprávne označuje ako Nobelova cena za ekonómiu. S udeľovaním cien je spojená veľká publicita (a aj finančná odmena 10 miliónov švédskych korún – viac než 1,1 milióna eur) a ide o jedno z najprestížnejších ocenení vedcov. V nasledujúcich číslach časopisu si podrobnejšie priblížime jednotlivé ceny za fyziológiu alebo medicínu, fyziku a chémiu, ale nezabudneme ani na zvyšné tri ceny.

Nobelova cena za fyziológiu alebo medicínu

Nobelovu cenu za fyziológiu alebo medicínu v roku 2011 získali Bruce A. Beutler a Jules A. Hoffmann za objav, ktorý sa týka aktivácie prirodzenej imunity, a Ralph M. Steinman za objav dendritických buniek a ich úlohy v získanej imunitě. Pri udeľovaní ceny R. Steinmanovi však stála komisia pred neľahkou úlohou – ocenený totiž v čase ocenenia už nežil. Pravidlá udeľovania Nobelových cien totiž stanovujú, že cena sa nesmie udeliť posmrtné. Výnimku majú len tie prípady, keď vedec zomrie v období medzi zverejnením ocenenia a jeho odovzdávaním. V tomto prípade však členovia komisie v čase hlasovania a zverejňovania ocene-

nia o jeho smrti nevedeli, a tak mu napokon toto ocenenie ponechali.

Imunitný systém má neuveriteľne rýchlu schopnosť identifikovať nepriateľov všetkých druhov a okamžite spustiť vhodný protiútok. Dlhú však trvalo, kým sa prišlo na to, ako to všetko funguje. Zaslúžili sa o to práve minuloroční laureáti Nobelovej ceny za fyziológiu alebo medicínu.

Možno aj vy práve v tomto okamihu čelíte útoku – množstvo parazitov čaká na vhodný čas na vašej koži alebo vo vašom tele. Avšak nemusíte sa obávať, váš imunitný systém má všetko pod kontrolou. Ak zatiaľ útočníkov nezaregistroval a nespustil protiútok, určite tak čoskoro urobí.

Počas miliónov rokov dokázal imunitný systém vyvinúť dômyselné mechanizmy, ktorými zabezpečuje, že bude aktivovaný presne a práve vtedy, keď to bude potrebné, aby prekabátil a premohol nespočetné množstvo mikroorganizmov – baktérií, vírusov, húb či parazitov.

Dva druhy obransychopnosti

Začiatkom 20. storočia urobili vedci veľký pokrok smerom k pochopeniu ľudského imunitného systému. Objavil sa obraz systému obsahujúceho dve základné línie, ktoré bojujú s nájazdmi patogénov rôznymi spôsobmi, ale zároveň navzájom spolupracujú. Tieto dve línie sa nazývajú prirodzený (vrodený, nešpecifický) imunitný systém a získaný (špecifický) imunitný systém.